Zu den Stichpunkten

- Schnittpunkt von Geraden
- Parallelität

Erinnerung an I 1 und I 2

A) Ebene Inzidenzaxiome

(1.2) Verbindungs- und Reichhaltigkeitsaxiom (Inzidenz Punkte-Geraden)

Geraden-Grundsatz

I 1	*Zu je zwei (verschiedenen)* [2] *Punkten* $P, Q \in \mathcal{P}$ *gibt es stets genau eine Gerade* $g \in \mathcal{G}$, *mit der* P *und* Q *inzidieren.*
I 2	*Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.*

(2.1) Definition (Parallelität)

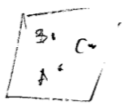
(a) Zwei *Geraden* heißen *parallel*, wenn sie entweder gleich sind oder in einer Ebene liegen und disjunkt sind (d.h. keinen Punkt gemeinsam haben).

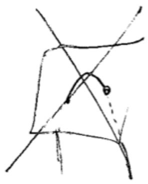
Folgerungen für Geraden in einer affinen Ebene A :

Zwei versch. Geraden in A sind entweder parallel oder schneiden sich in einem eindeutigen Punkt.

Durch zwei verschiedene Punkte von A geht genau eine Gerade von A. (Unterschied zu Axiom I 1: Die Gerade liegt ganz in A, siehe Axiom I 4.)

(1.5) **Axiome** *I3* **und** *I4* **(Inzidenz Punkte-Ebenen)**





I3 :	*Zu je drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkten* A,B,C $\in$ P *gibt es genau eine Ebene* F $\in$ E, *mit der* A,B *und* C *inzidieren. Zu jeder Ebene* F $\in$ E *gibt es mindestens 3 auf ihr liegende nicht-kollineare Punkte.*
I4 :	*Wenn zwei Punkte einer Geraden* $g \in G$ *in einer Ebene* F $\in$ E *liegen, so liegt jeder Punkt von* g *in dieser Ebene.*

Beachten Sie auch das Euklidische Parallelenaxiom:

(2.3) **Axiom** *(EP) (Euklidisches Parallelenaxiom)*

Zu jeder Geraden g *und jedem Punkt* $B \notin g$ *gibt es genau eine Gerade* h *durch* B, *die zu* g *parallel ist.*

– Affine Geometrie über K^3.

Beispiel (d) ist ein Spezialfall der folgenden Standardbeispiele (e):

(e) "AG(V)" (Affine Geometrie des K-Vektorraums V; affiner Raum über K):

Sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim_K V \geq 2$

$P = V$

$G = \{$ Menge aller 1-dim affinen Unterräume von V (d.h. von Mengen der Form $a + Kb \subseteq V$ mit $b \neq 0$)

$E = \{$ Menge aller 2-dim affinen Unterräume von V (d.h. von Mengen der Form $a + Kb + Kc \subseteq V$ mit linear unabhängigen Vektoren b, c).

Inzidenz jeweils $\in$.

Erinnerung:

$$GF(p) = (\{0, 1, \dots, p-1\}, +, \cdot)$$

mit Add. und Mult. modulo p.

– Translationen

(3.1) Definition

Eine Bijektion $\varphi : P \longrightarrow P$ heißt *Dehnung (Dilatation, affin-axiale Kollineation)*, falls für beliebige Punkte $A, B \in P$ mit $A \neq B$ gilt: $\varphi(A)\varphi(B) \parallel AB$.

Eine Dehnung φ heißt *zentrische Streckung (eigentliche Dehnung)*, falls sie mindestens einen Fixpunkt Z besitzt, d.h. einen Punkt $Z \in P$ mit $\varphi(Z) = Z$.

Eine Dehnung heißt *Translation* (Parallelverschiebung), falls sie fixpunktfrei oder die Identität ist.

Eigenschaften:

Eine Translation ist durch einen Punkt P und den zugehörigen Bildpunkt Q eindeutig bestimmt.

Bezeichnung: τ_{PQ}

Weitere Eigenschaft:

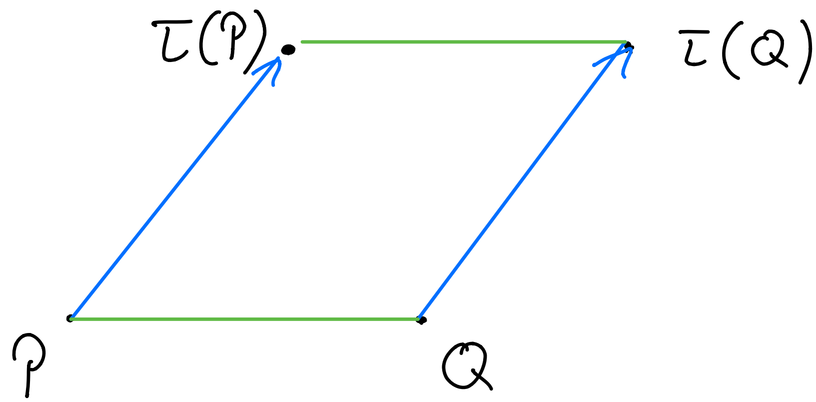
Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet und die Geraden $P\tau(P)$ sind für jedes P Fixgeraden wobei $\tau \neq id$ vorausgesetzt wird.

($P\tau(P)$ heißt „Spur")

Und alle Spuren sind parallel.

Folgerung:

- Parallelogrammkonstruktion


$\tau(P)$
$\tau(Q)$
P
Q